Partie 1 : Le signal analogique

1. Introduction

Qu'est-ce qu'un signal ?
Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps s(t) obtenues à l'aide de capteurs. Mais le traitement du signal s'applique à tous les signaux physiques (onde acoustique, signal optique, signal magnétique, signal radioélectrique, etc.). Le traitement d'images peut être considéré comme une extension du traitement du signal aux signaux bidimensionnels (images).
Le bruit est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal pour les radioastronomes.
La théorie du signal a pour objectif fondamental la « description mathématique » des signaux. Cette représentation commode du signal permet de mettre en évidence ses principales caractéristiques (distribution fréquentielle, énergie, etc.) et d'analyser les modifications subies lors de la transmission ou du traitement de ces signaux.
Exemples de signaux :

- Signal numérique (figure 1) : suite binaire (0 ou 1) convertie en suite d'impulsions (0 ou A en volts).

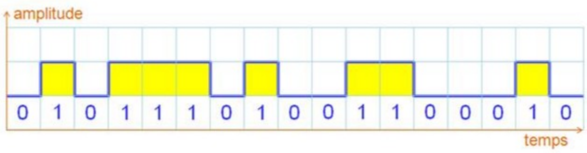


Figure 1: Exemple d'un signal numérique : suite de 0 et de 1 et conversion en suite d'impulsions électriques d'amplitude

- Signal électrique (figure 2) : mesure de la tension ou de l'intensité (oscilloscope, voltmètre, …)

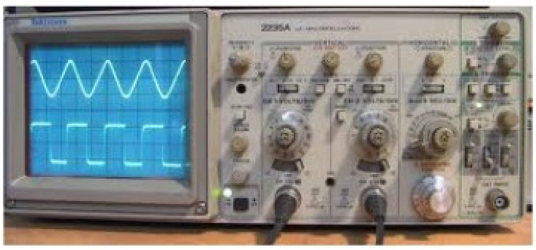
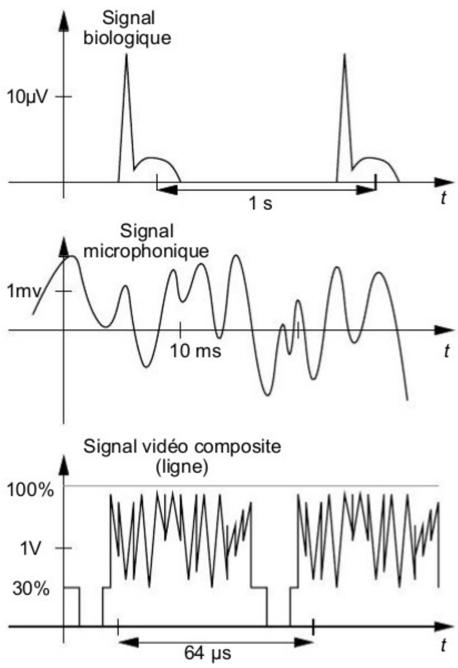


Figure 2: Oscilloscope et mesure de tension

Figure 3: Oscilloscope et mesure de tension

- et ci-contre, différents types de signaux :



Le traitement du signal est la discipline technique qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet **l'élaboration ou l'interprétation des signaux**. Son champ d'application se situe donc dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation des informations véhiculées par ces signaux.
Le traitement de l'information fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances des systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque **le signal porteur de message est bruité**. Cela inclut les méthodes de « codage de l'information » dans le but de la réduction de redondance, de la correction des erreurs, de la confidentialité (cryptage). L'ensemble des concepts et méthodes développés dans le traitement de l'information et du signal forme la théorie de la communication.

2. PRINCIPALES FONCTIONS DU TRAITEMENT DU SIGNAL

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes :

→ **Élaboration des signaux**

- <u>synthèse :</u> création de signaux de forme appropriée en procédant par exemple à une combinaison d'un capteur en entrée (exemple : tension, courant, capacité, résistance, inductance, pont de wheastone,...)
- <u>modulation, changement de fréquence :</u> moyen permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission (exemple : AM, FSK..)
- <u>codage :</u> traduction en code binaire (quantification), etc. (exemple : I2C, SPI, Ethernet,…)

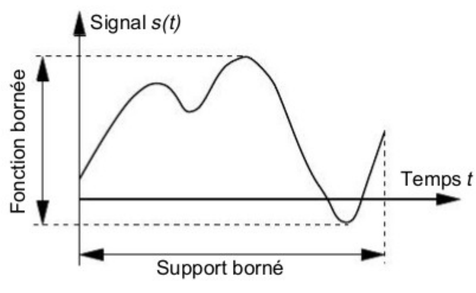
→ **Interprétation des signaux**

- <u>filtrage :</u> élimination de certaines composantes fréquentielles indésirables ;
- <u>détection :</u> extraction du signal d'un bruit de fond (corrélation) ;
- <u>identification :</u> classement d'un signal dans des catégories préalablement définies ;
- <u>analyse :</u> isolement des composantes essentielles ou utiles d'un signal de forme complexe (transformée de Fourier) ;
- <u>mesure :</u> estimation d'une grandeur caractéristique d'un signal avec un certain degré de confiance (valeur moyenne, etc.).

3. MODÉLISATION DES SIGNAUX

Un signal expérimental est une grandeur physique et doit donc être physiquement réalisable. Les mesures macroscopiques analogiques, réalisées à partir d'appareils de mesures comme un oscilloscope, fournissent des courbes « tension en fonction du temps » du type de celle représentée sur la figure 1.1.
Ces signaux physiques sont représentés par des fonctions s(t) à valeurs réelles d'une variable réelle t. Par conséquent, le signal possède les caractéristiques suivantes :

- énergie bornée ;
- amplitude bornée ;
- continu temporellement ;
- causal (s(t) = 0 pour t < 0) ;
- spectre du signal borné (tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini).



Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont représentés par des fonctions :

- à énergie théorique infinie ;
- avec des discontinuités (signal carré) ;
- définies sur l'ensemble des réels (signaux non causaux) ;
- à spectre du signal infini ;
- à valeurs complexes : $s(t)=A\,e^{j\omega t}=A[\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)]$

4. CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Pour faciliter l'étude des signaux, différents modes de classification ou de modélisation peuvent être envisagés :

- représentation temporelle des signaux ;
- caractéristique énergétique ;
- représentation spectrale ;
- caractéristique morphologique (continu ou discret).

4.1. Représentation temporelle des signaux

La première classification, basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, fait apparaître deux types fondamentaux:
les signaux certains (ou déterministes) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique. Ces signaux proviennent de phénomènes pour lesquels on connaît les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant ainsi de prévoir le résultat ;
les signaux aléatoires (ou probabilistes) dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.
Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux périodiques satisfaisant à la relation suivante :
s(t) = s(t + T) avec T la période

Les signaux sinusoïdaux sont un cas particulier de ces signaux : s(t) = A sin[(2π/T)t + ϕ]

4.2. Classification énergétique

La puissance électrique instantanée fournie à une résistance R (ou conductance G) est définie comme le produit des valeurs instantanées de la tension u(t) à ses bornes et du courant i(t) qui la traverse :
$p(t) = u(t)i(t) = Ri^2(t) = Gu^2(t)$

L'énergie dissipée sur un intervalle [t1 , t 2], avec t1 < t 2 , est l'intégrale de cette puissance instantanée et se mesure en joules (J) :

$$W(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} p(t).dt=R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t).dt=G\int_{t_1}^{t_2} u^2(t).dt$$

Par conséquent la puissance moyenne $P(t_1, t_2)$, mesurée en watts (W), s'exprime sous la forme suivante :

$$P(t_1,t_2)=\frac{W(t_1,t_2)}{(t_2-t_1)}$$

Par extension on appelle énergie Ws et puissance moyenne Ps d'un signal s(t), calculées sur un intervalle $[t_1, t_2]$, les valeurs quadratique et quadratique moyenne suivantes :

$$W_S(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} s^2(t).dt \text{et } P_S(t_1,t_2)=\frac{1}{(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t).dt$$

Il est à remarquer que la valeur efficace du signal s(t), calculée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, se définit ainsi :

$$s_{eff}(t_1,t_2)=\sqrt{P_S(t_1,t_2)}$$

En considérant un intervalle s'étendant sur tout l'axe réel, les relations suivantes donnent l'énergie totale et la puissance moyenne totale

$$W_S=\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t).dt \text{ et } P_S=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t).dt$$

Pour un signal périodique, de période T_0 : $P_S=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} s^2(t).dt$

La plupart des signaux peuvent être classés à partir de ces deux grandeurs, énergie totale et puissance moyenne totale, suivant les deux ensembles :

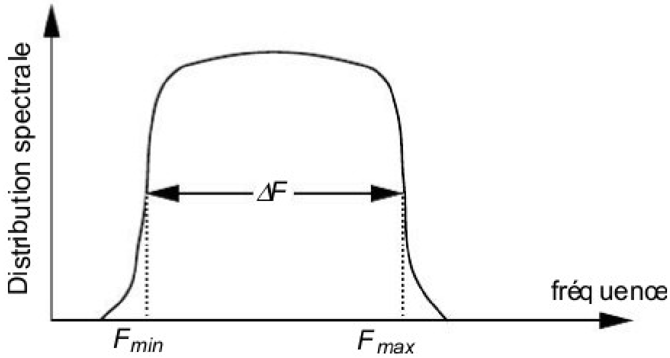
- signaux à énergie finie qui satisfont à la condition suivante : $W_S = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t).dt < \infty$
- signaux à puissance moyenne finie qui satisfont à : $0 < P_S = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s^2(t).dt < +\infty$

Avec ces 2 dernières équations, il est possible de faire 2 remarques peuvent être faites :

- un signal à puissance moyenne finie non nulle a une énergie totale infinie ;
- un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle (cas des signaux physiques)

4.3. Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine des fréquences occupé par son spectre ΔF est aussi appelé la largeur de bande du signal : $\Delta F = F_{max} - F_{min}$



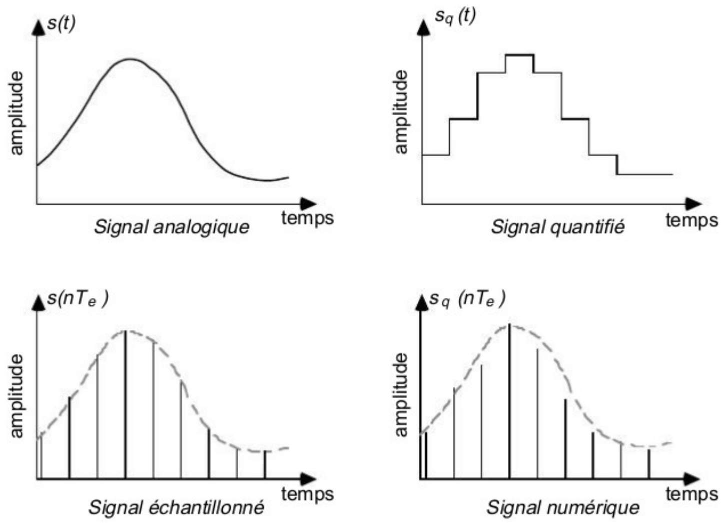
4.4. Aparté sur les signaux numériques

Le temps est un paramètre important de classification. Le traitement numérique des signaux conduit à faire la distinction entre les signaux dits à temps continus (signaux continus) et les signaux dits à temps discrets (signaux discrets ou échantillonnés). Un autre paramètre des signaux traités est à prendre en compte, c'est l'amplitude qui peut aussi être continue ou discrète (quantifiée).
Ainsi quatre formes de signaux, qui se retrouvent dans un système numérique de contrôle d'un processus physique, peuvent être distinguées :

- signal à amplitude et temps continus (signal analogique) : s(t) ;
- signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : s_q (t). Ce signal correspond à celui qui est fourni à la sortie d'un circuit convertisseur numérique-analogique pour la commande d'un actionneur ;
- signal à amplitude continue et temps discret (signal échantillonné) : s(nT e). Ce signal est obtenu à l'aide d'un circuit échantillonneur-bloqueur et est utilisé par un circuit convertisseur analogique numérique pour obtenir un signal logique utilisable par un ordinateur ;
- signal à amplitude discrète et temps discret (signal logique) : s_q (nTe). Ce dernier cas correspond en réalité à une suite de nombres codés en binaire. Ces nombres, utilisés au sein d'un ordinateur, se transmettent sous la forme de plusieurs signaux de type numérique 0 V (0 logique) ou 5 V (1 logique) se propageant en parallèle : 8 signaux pour un nombre codé sur 8 bits.

Définition : On appelle numérisation d'un signal l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales :

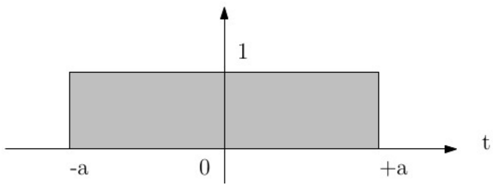
5. échantillonnage ;
6. quantification.



5. Signaux théoriques standards

Fonction Porte. La fonction Porte (ou rectangulaire) se note Π_{2a} . Elle a pour amplitude 1 sur l'intervalle [−a; a] et est nulle ailleurs

$$\Pi_{2a} = \begin{cases} 1 \text{ pour } |t| \leq a \\ 0 \text{ pour } |t| > a \end{cases}$$



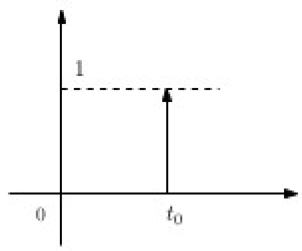
Fonction Dirac. L'impulsion de Dirac est équivalente à une fonction porte dont la largeur tend vers 0 et la hauteur à l'infini, à surface constante égale à 1. Sa définition est donc la suivante :

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{2.a} . \Pi_{2a}(t) = \delta(t)$$

On peut également définir l'impulsion de Dirac sous la forme :

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} +\infty \; pour \; t=0 \\ 0 \; pour \, t \; \in \mathbb{R} \end{bmatrix}$$

L'impulsion au temps t_0 se note $\delta(t - t_0)$, une représentation temporelle est donnée ci-dessous. Le Dirac possède plusieurs propriétés fondamentales pour le traitement du signal :

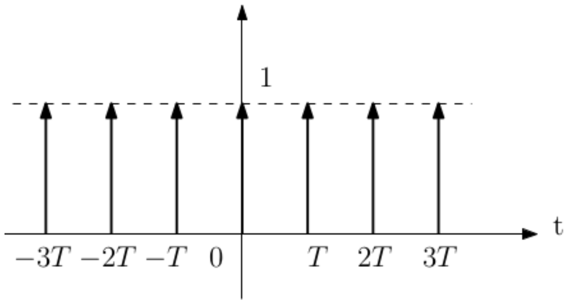


Propriétés de l'impulsion de Dirac :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) . dt = 1$
- $x(t) . \delta(t - t_0) = x(t_0) . \delta(t - t_0)$
- $\delta(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i.a.t)} . dt = 1$

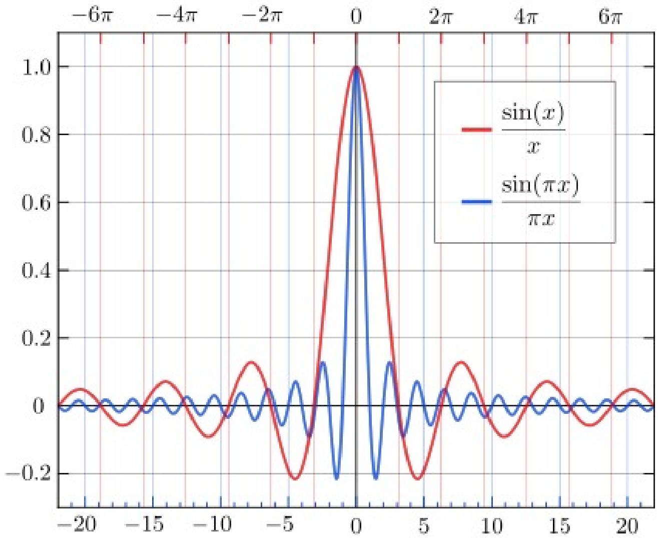
<u>Peigne de Dirac :</u> Lorsque plusieurs impulsions de Dirac se répètent à une période T, on obtient alors un peigne de Dirac

$$\text{Ш}_T(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT).$$



<u>Fonction Sinus cardinal :</u> Le sinus cardinal est définit par :

Pour t ∈ R\0, $sinc(t)=\frac{\sin(t)}{t}$ qui est représenté ci-dessous :



5. TRANSFORMATION DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES. SÉRIE DE FOURIER

5.1. Définition. Théorème de Fourier

Si s(t) est une fonction de t périodique, de période T_0 (= $1/F_0$), elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence F_0, dite fondamentale. Soit :

$$s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n.\cos(2.\Pi.n.F_0.t)+b_n.\sin(2.\Pi.n.F_0.t)\right]$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier. Ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0=\langle s(t)\rangle=\overline{s(t)}=\frac{1}{T_0}.\int_0^{T_0} s(t).dt$$:*C'est la valeur moyenne (ou la composante continue) de notre signal périodique*

$$a_n=\frac{2}{T_0}.\int_0^{T_0} s(t).\cos(2.\Pi.n.F_0.t).dt \text{ pour n} \geq 1$$

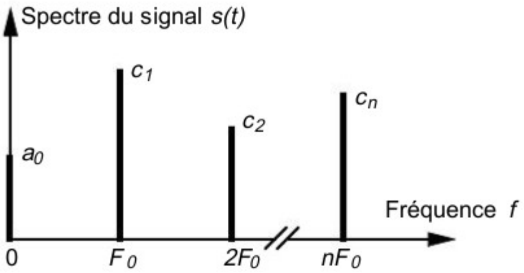
$$b_n=\frac{2}{T_0}.\int_0^{T_0} s(t).\sin(2.\Pi.n.F_0.t).dt \text{ pour n} \geq 1$$

Remarques :

- Si la fonction s(t) est impaire (s(t) = -s(-t)) alors les coefficients a_n sont nuls
- Si la fonction s(t) est paire (s(t) = +s(-t)) alors les coefficients b_n sont nuls

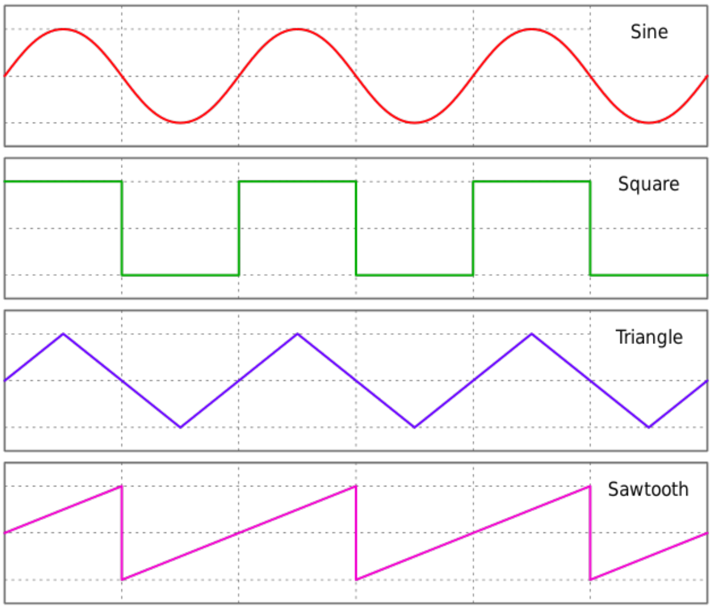
De même, l'équation $s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n.\cos(2.\Pi.n.F_0.t)+b_n.\sin(2.\Pi.n.F_0.t)\right]$ peut également être sous cette forme : $s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n.\cos(2.\Pi.n.F_0.t+\varphi_n)\right]$ avec $c_n=\sqrt{(a_n^2+b_n^2)}$et $\varphi_n=\arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$

Ainsi, nous pouvons construire la représentation graphique spectrale du signal dans un plan amplitude-fréquence comme étant la succession des pics ou raies d'amplitude c n et positionnés aux fréquences nF_0



Le spectre en fréquence du signal représente l'amplitude du fondamental a_0 pour f = F0 ainsi que les différentes harmoniques c_n pour f = n.F0. Le spectre d'une fonction périodique est discontinu et composé de raies dont l'écart minimum sur l'axe des fréquences est F0 : les raies sont toujours à des fréquences multiples de F0.

Exemples :



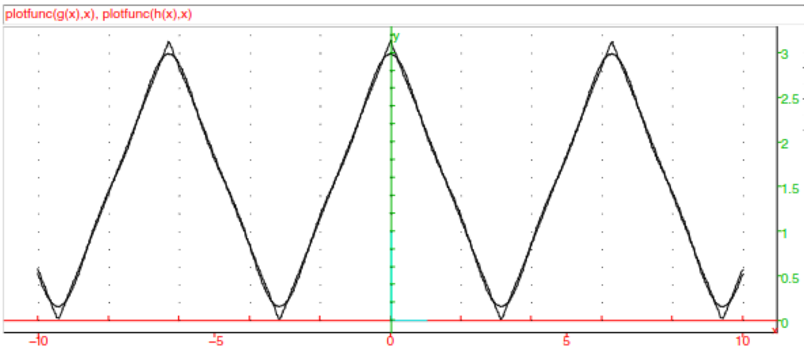
Exemple sur le signal carré :

Le signal vaut 1 de sur [0, π] et 0 sur]π, 2π[

Vérifier que les coefficients de la série de Fourier sont :

$a_0=\frac{1}{2}$; $a_n=0$; $b_{2p}=0$ et $b_{2p+1}=\frac{2}{(2p+1).\Pi}$

Exemple sur le signal dents de scie (sawtooth):



Il s'agit la fonction f , paire, périodique de période 2π, définie sur [0, π] par f (x) = π − x

Comme f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont nuls

Vérifier que les coefficients de la série de Fourier sont :

$a_0=\frac{1}{2.\Pi}\int_{-\Pi}^{\Pi} f(t).dt=\frac{1}{\Pi}\int_0^{\Pi}(\Pi-t).dt=\frac{\Pi}{2}$;

$a_n=\frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi} f(t).\cos(nt).dt=\frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi}(\Pi-t).\cos(nt).dt=\frac{-2}{\Pi}\int_0^{\Pi} t.\cos(nt).dt=\frac{2.(1-(-1)^n)}{\Pi.n^2}$ pour n≥1 ;

(intégration par parties). En distinguant les parités de n, on obtient :

$a_{2p}=0$ pour p≥1

$a_{2p+1}=\frac{4}{\Pi.(2p+1)^2}$ pour p≥0

et donc, $b_n=0$

Exercice 1 :
Soit la tension EDF (Veff=230V, f=50Hz), redressée par un pont simple alternance.

1. Représentez le schéma de montage
2. Représentez le chronogramme du signal EDF et du signal ainsi redressée
3. Réalisez la décomposition en série de Fourier des signaux
4. Représentez le spectre en amplitude des signaux

Exercice 2 :
Soit la tension EDF (Veff=230V, f=50Hz), redressée par un pont double alternance.

5. Représentez le schéma de montage
6. Représentez le chronogramme du signal EDF et du signal ainsi redressée
7. Réalisez la décomposition en série de Fourier des signaux
8. Représentez le spectre en amplitude des signaux

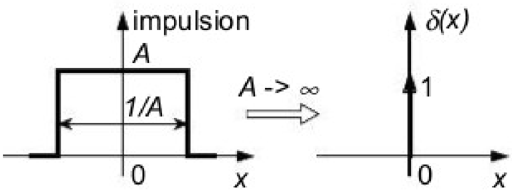
Exercice 3 :
Soit un hacheur série (f=1kHz), alimenté par une batterie 12V et avec une charge RL : R= 10mΩ et L = 10H :

9. Représentez le schéma de montage
10. Représentez le chronogramme du signal EDF et du signal ainsi redressée
11. Réalisez la décomposition en série de Fourier des signaux
12. Représentez le spectre en amplitude des signaux

L'analyse de Fourier est un moyen de décomposer un signal en une somme de signaux élémentaires particuliers, qui ont la propriété d'êtres faciles à mettre en œuvre et à observer. L'intérêt de cette décomposition réside dans la fait que la réponse au signal d'un système obéissant au principe de superposition peut être déduite de la réponse aux signaux élémentaires.
Ces signaux élémentaires sont périodiques et complexes, afin de permettre une étude en amplitude et en phase des systèmes ; ils s'expriment par la fonction s_e (t) telle que :
$s_e(t)=\exp(j.2.\pi.f.t)=\cos(2.\pi.f.t)+j.\sin(2.\pi.f.t)$où f représente l'inverse de la période, c'est la fréquence du signal élémentaire

5.2 Distribution ou pic de Dirac
La distribution de Dirac (pic de Dirac ou encore impulsion de Dirac) peut être vue comme un outil symbolique permettant de formuler des expressions. Notée δ elle peut être perçue comme la limite d'une impulsion d'amplitude A et de durée 1/A lorsque A tend vers l'infini. L'aire de cette impulsion est constante et égale à 1 quel que soit A. Le pic de Dirac sera défini comme ayant un poids ou une « masse » de 1 en x = 0. Dans le domaine du traitement du signal, le pic de Dirac δ(x) est une distribution ou « fonction » qui vérifie :

$\delta(x)=0$ pour $x\neq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x).dx=1$



La distribution de Dirac possède des propriétés au niveau des opérations avec les fonctions : propriété de localisation (opération de « produit » avec une fonction) et propriété d'élément neutre (opération de « convolution » avec une fonction). Il est important de souligner que, pour des raisons de facilité, les opérations, faisant intervenir pics de Dirac et fonctions, utilisent des notations identiques à celles utilisées pour les fonctions bien que nous soyons dans le domaine des distributions.

5.3 Représentations unilatérale et bilatérale
L'expression du théorème de Fourier peut encore se mettre sous la forme complexe suivante :

$$s(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n.\cos\left(2.\Pi.n.F_0.t+\varphi_n\right)\right]$$

$$s(t)=\sum_{n=\infty}^{\infty} S(n.F0).e^{j.2.\Pi.n.F_0.t}$$

avec $S(n.F0)=\frac{1}{2}(a_n-j.b_n)=\frac{1}{T_0}.\int_0^{T_0} s(t).e^{j.2.\Pi.n.F_0.t}.dt$ pour n ≥ 1

et $S(0)=a_0=<s(t)>=\overline{s(t)}$

Les valeurs négatives de n sont introduites dans un but de simplification ; mais, étant donné que s(t) est réel, nous avons :

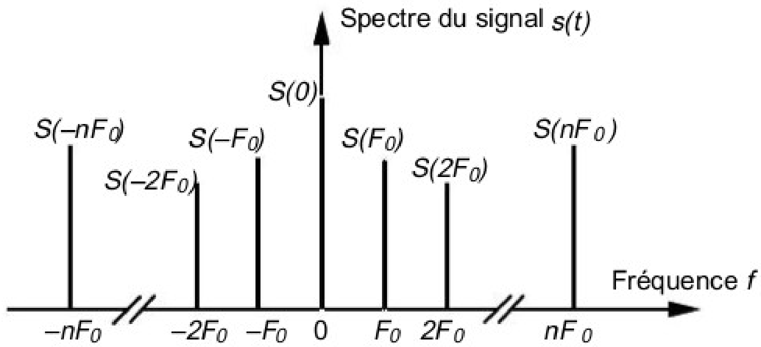
$$a_{-n} = a_n \text{ et } b_{-n} = -b_n$$

S(nF 0) représente les composantes du spectre en fréquence de s(t), grandeur en général complexe, qui a pour module : $\left|S(n.F0)\right|=\frac{1}{2}.\sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}=\frac{c_n}{2}$

et pour la phase : $\varphi(n.F0)=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$

En utilisant la notation mathématique du pic de Dirac δ décrite précédemment, le spectre en fréquence du signal est formé de pics de Dirac de poids |S(nF0)| réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives. Par convention, on dessine chaque raie en lui donnant une hauteur proportionnelle à son poids ou sa masse égale à |S(n.F0)| . L'expression du spectre S(f) du signal est donc :

$S(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n.F0).\delta(f-n.F0)$ avec $S(n.F0)=\left|S(n.F0)\right|.e^{j.\varphi.n.F_0}$



Remarque : Ce spectre S(f) est en général complexe formé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire et devrait donc être représenté dans un système à trois dimensions : axe des fréquences f , axe de la partie imaginaire Im{S(f)} et axe de la partie réelle Re{S(f)}.

Cette représentation complexe du signal distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe des fréquences : c'est la représentation spectrale bilatérale S(f) (fréquences positives et négatives). Cette représentation abstraite (fréquences négatives) présente l'avantage de simplifier les calculs au niveau du traitement des signaux. Seule la représentation unilatérale $S_{réel}$ (f) (spectres composés de fréquences positives uniquement), calculée par un développement en série de Fourier, est une représentation réelle qui peut être obtenue à partir d'analyseurs de spectres ou de transformateurs de Fourier qui présentent le module de ce spectre.

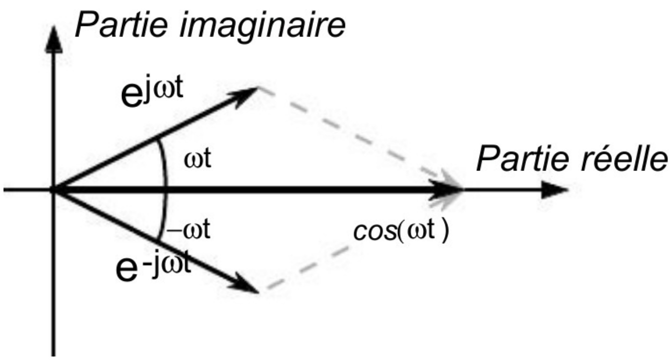
on peut déterminer la relation entre les deux formes de représentation : $S_{réel}(f) = S(f) . K_{réel} (f)$

où $K_{réel}(f)$ (coefficient de représentation réelle) est définie par :

$$K_{réel}(f)\begin{matrix}=2 \;\; si \;\; f>0\\ =2 \;\; si \;\; f=0\\ =2 \;\; si \;\; f<0\end{matrix}$$

Le concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il peut être vu comme la traduction du sens de rotation de la vitesse angulaire ou pulsation (ω = 2πf). Ainsi la fonction réelle cos(ωt) ou cos(2πft) peut être exprimée comme la somme de deux fonctions complexes dans le plan complexe :

$$\cos(\omega.t)=\frac{1}{2}.\left(e^{j.\omega.t}+e^{-j.\omega.t}\right)$$



5.4 Exemples de signaux élémentaires

a) Signal sinusoïdal

Dans le cas des signaux sinusoïdaux ou cosinusoïdaux, la transformée en série de Fourier du signal est identique à sa représentation mathématique.

➤ cas du signal s(t) = cos ($2\pi F_0 t$) : calculez la décomposition en série de Fourier :

→ La décomposition en série de Fourier est donc définie par :

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n > 1$ et $bn = 0$ pour $n \geq 1$

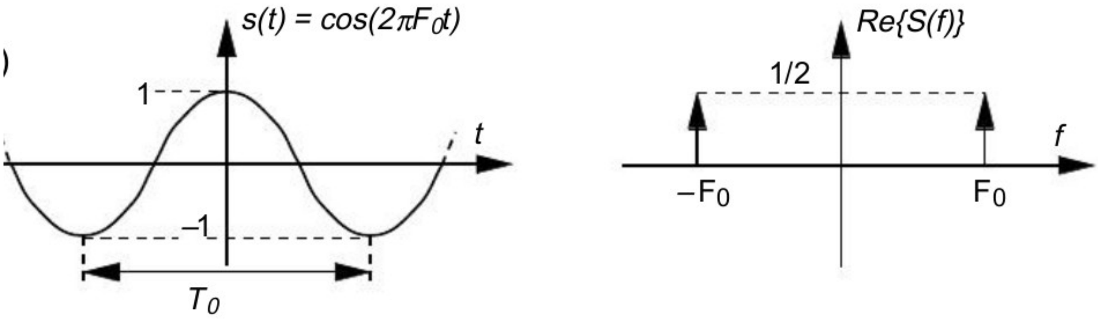
→ les valeurs de S(nF0) non nulles sont : $S(F0)=\frac{1}{2}.(a_1+j.b_1)=\frac{1}{2}$ et

$$S(-F0)=\frac{1}{2}.(a_{-1}+j.b_{-1})=\frac{1}{2}.(a_1+j.b_1)=\frac{1}{2}$$

PS : J'ai calculé à partir de $S(n.F0)=\frac{1}{2}(a_n-j.b_n)=\frac{1}{T_0}.\int_0^{T_0} s(t).e^{j.2.\Pi.n.F_0.t}.dt$

D'où le spectre du signal, écrit dans une représentation bilatérale suivant la relation :

$$S(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n.F0).\delta(f-n.F0)=\frac{1}{2}.[S(n.F0).\delta(f-n.F0)]$$



Effectuez le même calcul pour le signal (t) = sin ($2\pi F_0 t$) pour obtenir la représentation suivante :