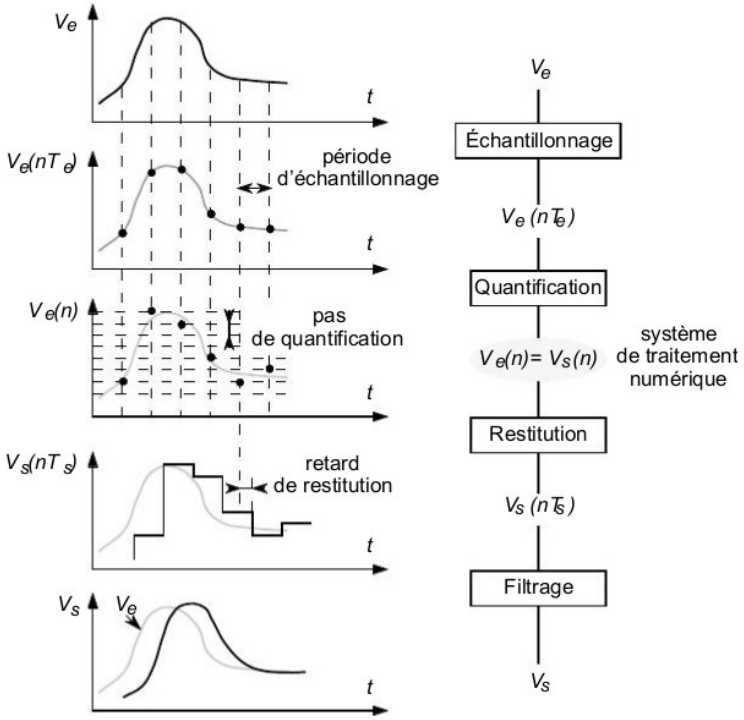
1. Échantillonnage

L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu s(t) par un ensemble de valeurs discrètes s(nT_e) avec n entier et T_e constant appelé période d'échantillonnage. Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleveur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur. Dans une première phase, nous pouvons faire l'hypothèse que cette durée de prélèvement du signal est très courte et négligeable.
En supposant que le système numérique ne réalise aucun traitement sur le signal enregistré, l'enchaînement des différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est celui présenté sur la figure suivante.



1ère étape : Le signal analogique d'entrée Ve est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement Ve (nT_e). Mais après cette phase de prélèvement d'échantillons, il est nécessaire de coder la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de quantification (2nd étape). Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leur arrivée, formant ainsi une suite de valeurs numériques Ve(n). Si, comme supposé, le système numérique n'effectue aucun traitement sur ces valeurs $V_e(n) = V_s(n)$, cette suite de nombres $V_s(n)$ est envoyée vers le procédé externe en réalisant successivement deux étapes.
3ème étape : D'une part le système doit restituer la valeur analogique V_s (nT_s) qui est l'opération inverse de la quantification et ensuite (4ème étape) il est nécessaire de mettre en place le filtrage de ce signal pour obtenir un signal de sortie Vs sans fronts « raides ».

Dans ce cas très simple, si l'on considère une période de restitution égale à la période d'échantillonnage ($T_s = T_e$), le résultat attendu est une restitution identique ou la plus proche possible du signal d'entrée : $V_s = V_e$. La différence, qui va exister entre ces deux signaux d'entrée et de sortie, est due à de nombreux paramètres dont les trois plus importants sont :

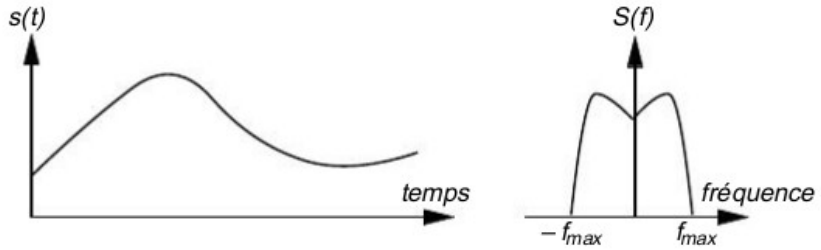
- la période d'échantillonnage Te ;
- le pas de quantification ou la précision de numérisation du signal ;
- le temps de réponse du système numérique entre l'acquisition et la restitution du signal.

Les deux derniers paramètres peuvent être facilement traités en augmentant la précision du convertisseur analogique numérique, c'est-à-dire en procédant à un accroissement de l'ensemble de codage d'une part et d'autre part en choisissant un système numérique de traitement plus rapide pour limiter le retard à la restitution.
Mais la détermination du premier paramètre, qui est le choix de la période d'échantillonnage, est plus difficile. En effet, il est clair que la diminution du temps entre deux échantillons ne peut qu'améliorer la chaîne de traitement numérique. Mais cette diminution de la période d'échantillonnage est au prix du traitement (acquisition, mémorisation et restitution) d'un plus grand nombre d'échantillons. Le problème de l'échantillonnage se pose donc en ces termes :

Existe-t-il, pour un signal donné, une période d'échantillonnage qui soit un « bon compromis » entre la qualité du traitement numérique et la minimisation du nombre de mesures ou d'échantillons?

2. Échantillonnage idéal

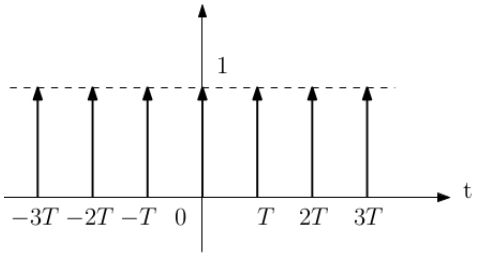
On suppose que le signal s(t) a un spectre à support borné, c'est-à-dire que le spectre est limité : S(f) = 0 pour f > fmax. Cette limitation spectrale est soit naturelle (répartition initiale du signal), soit artificielle en utilisant un filtre.



Envisagé dans le domaine temporel, le processus d'échantillonnage revient à multiplier le signal analogique s(t) par une série d'impulsions unité : le « signal » obtenu est alors constitué d'une succession d'impulsions, dont la hauteur est modulée par l'amplitude du signal échantillonné. Cette opération mathématique, permettant d'avoir une représentation du signal échantillonné $s_e(t)$, s'obtient en utilisant le peigne de Dirac. Le peigne de Dirac, utilisé dans l'échantillonnage des signaux, est une suite de pics de Dirac régulièrement espacés de la période d'échantillonnage Te :

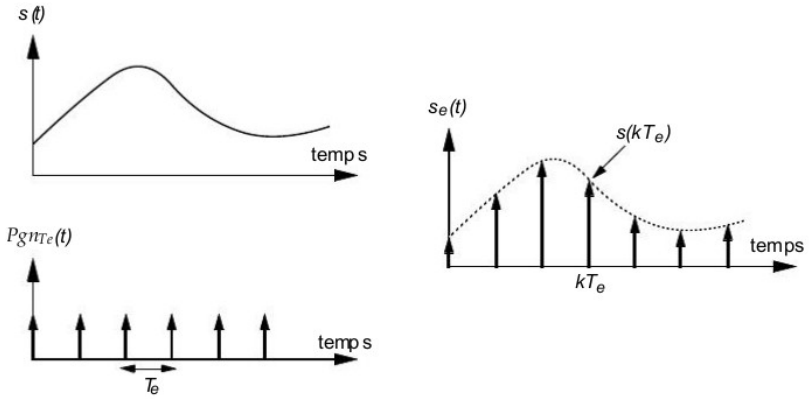
$$\text{Ш}_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

, noté $Pgn_T(t)$ pour peigne à la période T



Le signal échantillonné s_e (t) est une suite de pics de Dirac dont les poids sont les valeurs du signal s(t) aux instants kTe. Nous avons donc l'expression de s_e (t) :

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e).\delta(t - k.T_e)$$



D'après les propriétés du pic de Dirac, l'expression du signal échantillonné peut être mise sous la forme de l'expression suivante qui est rigoureusement équivalente :

$$s_e(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t).\delta(t-k.T_e)=s(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k.T_e) \quad \text{ou} \quad s_e(t)=s(t).Pgn_{Te}(t)$$

Ainsi, d'un point de vue mathématique, l'opération d'échantillonnage est représentée par la multiplication par la fonction « peigne » de Dirac.

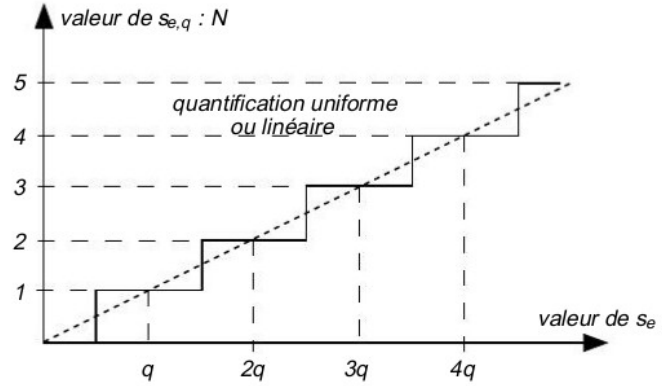
3. Quantification du signal échantillonné

Quantifier une valeur x réelle quelconque, c'est remplacer cette valeur par une valeur x_q appartenant à un ensemble dénombrable de valeurs entières suivant une certaine loi : arrondi au plus proche voisin, arrondi par défaut, etc.

Ainsi les échantillons temporels s_e (kT_e), représentant les valeurs de l'amplitude de s(t) aux instants kT_e , sont quantifiés pour donner des échantillons $s_{e,q}$ (kT_e). Dans le cas d'une quantification dite uniforme, l'amplitude maximale du signal est découpée en N intervalles identiques de valeur q. La valeur du signal échantillonné quantifié est définie par :

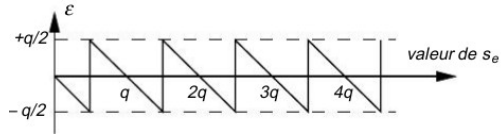
$$S_{e,q}=(kT_e)=N \quad \text{si} \quad Nq-\frac{q}{2}\leqslant S_e(kT_e)\leqslant Nq+\frac{q}{2}$$

Le circuit électronique, réalisant cette fonction est un convertisseur analogique-numérique. La fonction de transfert de ce circuit, exprimant le résultat de la relation ci-dessus, est représentée dans un plan signal quantifié en fonction de l'amplitude du signal. L'erreur de quantification ε pour une quantification uniforme dans le cas de l'arrondi au plus proche voisin est égale au demi-pas de quantification q/2



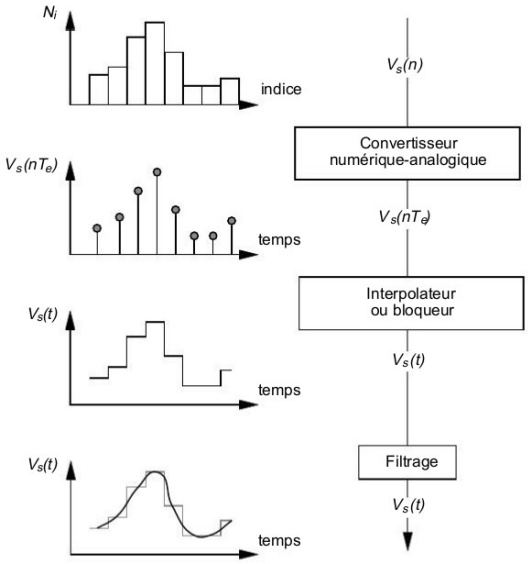
Si on étudie l'évolution de l'erreur de quantification ε(t) en fonction du temps et pendant un temps suffisamment grand θ où l'amplitude du signal varie sur une plage importante par rapport au pas de quantification q, cette erreur peut être approximée par une droite, représentant l'équi-répartition de l'erreur :

$$\varepsilon(t)=q\cdot\frac{t}{\theta} \quad \text{pour} \quad -\frac{\theta}{2}\leqslant t<\frac{\theta}{2}$$



4. Restitution du signal

La restitution du signal a pour but de redonner un signal continu temporellement à partir de valeurs discrètes connues à des instants kT_e , T_e étant la période d'échantillonnage. Pour reconstituer la continuité du signal, il faut effectuer une interpolation entre deux instants de discrétisation. Cette interpolation sera précédée du système permettant de transformer un nombre binaire représentant l'amplitude d'un signal à un instant donné en une valeur continue en amplitude, procédé inverse de la quantification. Il est important de remarquer que, dans ce cas, la transformation du code numérique (ensemble fini de valeurs) en une valeur analogique ne produit aucune erreur sur le signal contrairement au processus de quantification.



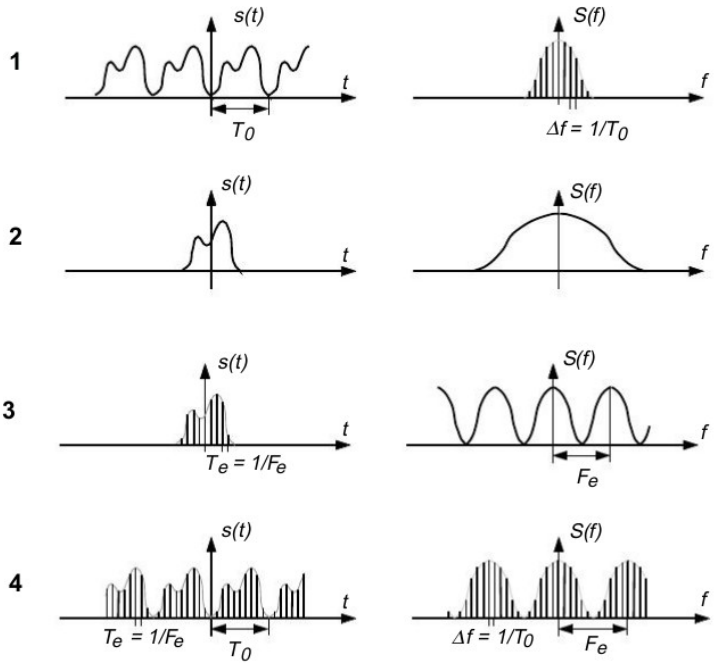
À partir des échantillons s_e (kT_e), ce circuit, appelé convertisseur numérique-analogique, donne un signal analogique s(t). Mais on souhaite une restitution plus continue qui puisse représenter plus fidèlement la forme analogique du signal, telle qu'elle aurait été obtenue avec un système de traitement analogique. Aussi on procède à une interpolation suivie d'un filtrage. Le rythme de la restitution, définie par la période T_s, est bien entendu fonction de la période d'échantillonnage T_e du signal.

5. Analyse spectrale des signaux discrets

L'analyse fréquentielle des signaux apporte une information supplémentaire importante. Pour les différents cas de signaux, classés selon les caractéristiques continu ou discret et périodique ou transitoire, la représentation fréquentielle possède des propriétés particulières équivalentes continue ou discrète et périodique ou non périodique. De plus les méthodes, utilisées pour calculer ces représentations spectrales, ne sont pas les mêmes selon ces différents types de signaux :

Signal	Spectre	
	Méthode de calcul	Caractéristiques
1 – continu et périodique	Série de Fourier	Discret et non périodique
2 – continu et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et non périodique
3 – discret et non périodique	Intégrale de Fourier	Continu et périodique
4 – discret et périodique	Transformée de Fourier discrète (TFD)	Discret et périodique

En effet, le spectre d'un signal continu est non périodique. Que le signal soit périodique (cas 1) ou non (cas 2), il est obtenu à partir du développement en série de Fourier pour le cas 1 et de la Transformée de Fourier ou de l'intégrale de Fourier pour le cas 2. Le spectre d'un signal discret et non périodique (cas 3) est continu et périodique et obtenu à partir de l'intégrale de Fourier. Par contre le calcul du spectre d'un signal périodique et discret (cas 4) utilise une nouvelle transformée : la transformée de Fourier discrète ou TFD.



D'une façon générale, si l'on désire avoir une représentation spectrale numérique (calcul par ordinateur), le calcul des raies spectrales implique une discrétisation en fréquence, ce qui a pour conséquence de rendre le signal temporel périodique et discret. Le calcul de façon pratique est limité à une tranche du signal, ce qui revient à des transformées identiques pour un signal non périodique et un signal périodique, c'est-à-dire que le signal transitoire doit être considéré comme périodiquement répété en dehors de son domaine d'existence.

6. La transformée de Fourier discrète : La TFD

Dans le but de calculer la transformée de Fourier d'un signal s(t) à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage) et à tronquer temporellement ce signal. On obtient ainsi une suite de N termes représentée par :

$$S_{e,\Pi}(t)=\sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e).\delta(t-kTe)$$

Appelons s_k les valeurs du signal $s_{e,\Pi}(t)$ aux instants kT_e . Le spectre $S_{e,\Pi}(f)$ de ce signal échantillonné limité à N termes est donné sous la forme de N éléments de valeurs S_m espacés de F_e /N suivant une expression identique :

$$S_{e,\Pi}(f)=\sum_{m=0}^{N-1} S_m.\delta(f-m.\frac{F_e}{N})$$

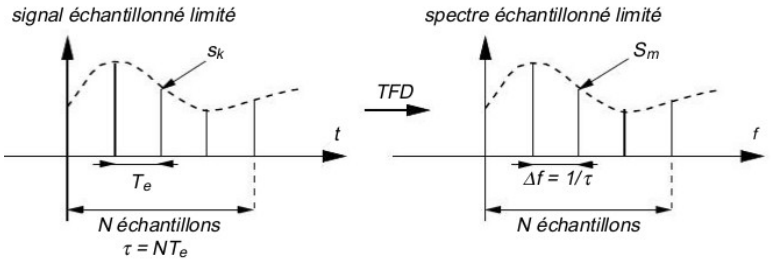
De la même façon que la transformée de Fourier S(f) du signal analogique s(t) s'exprime sous la forme

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t).e^{-j2.\Pi.ft}.dt$$

On appelle Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT : Discrete Fourier Transform) d'un signal défini par N échantillons s_k, la suite de N termes S_m définie par :

$$S_m=\sum_{k=0}^{N-1} S_k.e^{-j2\Pi\frac{km}{N}}$$

La transformée de Fourier discrète réalise la correspondance entre deux suites de N termes



Si les N échantillons ont été prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_e ($F_e = 1/T_e$), la durée du signal échantillonné, sur laquelle a été calculée la transformée de Fourier discrète, est donnée par :

$$\tau = N.T_e = \frac{N}{F_e}$$

En conséquence, le spectre de ce signal échantillonné, composé aussi de N termes, est calculé sur un domaine fréquentiel [0, F_e] avec une précision ou distance fréquentielle entre points égale à :

$$\Delta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N.T_e} = \frac{F_e}{N}$$

De même que pour la transformée de Fourier d'un signal continu, on peut définir une transformation inverse qui s'écrit :

$$S_{e,\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k.\delta(t - kT_e) \quad \text{avec} \quad S_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} S_m.e^{-j2\Pi\frac{km}{N}}$$