Partie 3 : La transformée en z

La transformée en z est un outil pour la représentation et l'étude des signaux discrétisés. Ces signaux sont donc échantillonnés (vu dans la partie 2) puis discrétisés (vu dans la partie 2).

Représentation des signaux :
le signal continu s(t) peut-être discrétisé en un signal discret s*(t)
s*(t) n'est défini que pour les instants $t \in t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k$
Ce signal s*(t) n'est donc défini que pendant les instants d'échantillonnages. En dehors de ces instants, ils sont inexistants (pas définis)
On peut écrire s*(t) comme s(k.T_e) ou s_k où T_e est la période d'échantillonnage.
On obtient une suite de valeurs que l'on appelle une séquence : {s_0, s_1, s_2, …,s_k}
La période d'échantillonnage $T_e = t_n - t_{n-1}$ est supposée constante

Définition de la transformée en z :
On appelle S(z) la transformée en z d'un signal s(t), la transformée de Laplace S*(p) du signal échantillonné s*(t) dans laquelle =fontion(p)

Calcul de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné :

$$L[s(t)] = \int_0^{+\infty} s(t).e^{-pt}.dt$$

signal échantillonné : $s*(t) = s(t).p(t) = s(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k.T_e)$

donc $L[s*(t)] = \int_0^{+\infty} \left(s(t).\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k.T_e) \right).e^{-pt}.dt$

$$L[s*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} s(t).\delta(t-k.T_e).e^{-pt}.dt$$

$$L[s*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k.T_e).e^{-k.T_e.p}$$

En supposant que s(t) = 0 et en posant $s = e^{T_e.p}$, on obtient :

$$S(z) = \sum_{k=-0}^{+\infty} s(k.T_e).z^{-k}$$

Exemple 1 : Calculez la transformée en z d'un échelon : s(t)=1

$$F(z) = \sum_{k=-0}^{+\infty} s(k.T_e).z^{-k} = \sum_{k=-0}^{+\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots.$$

On est devant une suite géométrique de raison z^{-1} donc : $F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

Exemple 2 : Calculez la transformée en z d'un signal: $s(t)=e^{-at}$:

$F(z) = \sum_{k=-0}^{+\infty} s(k.T_e).z^{-k}$ et $s(k.t_e) = e^{-a.k.T_e} = (e^{-a.T_e})^k = A^k$avec $A=e^{-a.Te}$=cst

donc $F(z) = \sum_{k=-0}^{+\infty} s(k.T_e).z^{-k} = \sum_{k=-0}^{+\infty} A^k.z^{-k} = \sum_{k=-0}^{+\infty} \left(\frac{A}{z}\right)^k = 1 + \frac{A}{z} + \left(\frac{A}{z}\right)^2 + \ldots.$

On est devant une suite géométrique de raison $\frac{A}{z}$ donc : $F(z) = \frac{1}{1-\frac{A}{z}} = \frac{1}{1-A.z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}.e^{-a.T_e}}$

Propriétés de la transformée en z :

Linéarité	$Z[a.x_k + b.y_k] = a.X(z) + b.Y(z)$
Avance	$Z(x_{k+1}) = z.X(z)$
Retard	$Z(x_{k-1}) = z^{-1}.X(z)$
Somme	$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \lim_{z\to 1} X(z)$
Valeur finale	$x_{+\infty} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$
Valeur initiale	$x_0 = \lim_{z\to +\infty} X(z)$
Convolution soit $\{c_m\} = \{x_n * y_n\}$ $c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m.y_{n-m}$	$Z[c] = X(z).Y(z)$

<u>Calcul de la transformée en z :</u>

Il existe 3 manières de calculer cette transformée en z

1. Par la formule de définition : $F(z) = \sum_{k=-0}^{+\infty} f(k.T_e).z^{-k}$
2. Par la théorie des résidus (non abordé dans ce cours)
3. Par l'utilisation du formulaire des transformées usuelles dans l'espace z comme ci-dessous :

$X(p)$	$X(t)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-\alpha}$ avec $\alpha = e^{-aT_e}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{(1-\alpha)z}{(z-1)(z-\alpha)}$ avec $\alpha = e^{-T_e/\tau}$

<u>Calcul de la transformée en z inverse :</u>

1. Par la théorie des résidus (non abordé dans ce cours)
2. Par l'utilisation du formulaire des transformées usuelles
3. par division polynomiale (calcul des n premiers échantillons)